

Mesures de dépendance entre images RSO

Grégoire MERCIER



CNRS UMR 2872 TAMCIC, Equipe TIME
Technopole Brest-Iroise, CS 83818, 29 238 Brest Cedex
Téléphone : +33 (0)2 29 00 10 59,
Télécopie : +33 (0)2 29 00 10 98



Dans le cadre de la détection de changements abrupts entre images RSO, nous nous intéressons à différentes techniques de mesure de dépendance (au sens large) pour pouvoir caractériser le comportement statistique local du couple des deux images.

I. INTRODUCTION

Nous nous plaçons dans le cadre de deux observations caractérisées par des variables aléatoires X_1 et X_2 comme le montre la figure 1.

Nous allons considérer tout d'abord une zone de 50×50 pixels autour du point (341, 187) qui se situe le long de la coulée de lave.

II. REPRÉSENTATION CONJOINTE LOCALE

A. Représentations directes

La figure 2 montre les représentations conjointes des réalisations de l'observation $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$.

Le premier graphe de la figure 2 représente simplement les réalisations simultanées des observations X_1 et X_2 , c'est-à-dire les points $(x_{1,i}, x_{2,i})$ pour $i \in \{1, 2, \dots, 50 \times 50\}$.

Le deuxième graphe représente les réalisations simultanées après transformation intégrale qui rend les deux distributions uniformes (que l'on nommera U_1 et U_2). Ainsi, l'on représente les couples $(u_{1,i}, u_{2,i})$ avec $u_{1,i} = F_{X_1}(x_{1,i})$ et $u_{2,i} = F_{X_2}(x_{2,i})$. $F_{X_1}(\cdot)$ (resp. $F_{X_2}(\cdot)$) est la fonction de répartition de X_1 (resp. X_2). Ainsi, $U_1 = F_{X_1}(X_1)$ (resp. $U_2 = F_{X_2}(X_2)$) est-elle uniforme.

B. Chi-Plot

Pour N réalisations de couple $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$, nous définissons les fonctions de répartition suivantes :

$$H_i = \frac{1}{N-1} \text{card} \{j \neq i : x_{1,j} \leq x_{1,i}, x_{2,j} \leq x_{2,i}\} \quad (1)$$

ainsi que :

$$F_{X_1}(i) = \frac{1}{N-1} \text{card} \{j \neq i : x_{1,j} \leq x_{1,i}\}$$

$$F_{X_2}(i) = \frac{1}{N-1} \text{card} \{j \neq i : x_{2,j} \leq x_{2,i}\}$$

Il est bien évident que si X_1 et X_2 sont indépendants, $H_i = F_{X_1}(i) \times F_{X_2}(i)$.

Le graphique χ -plot est défini par les paires (λ_i, χ_i) définies par :

$$\chi_i = \frac{H_i - F_{X_1}(i)F_{X_2}(i)}{\sqrt{F_{X_1}(i)(1-F_{X_1}(i)) F_{X_2}(i)(1-F_{X_2}(i))}} \quad (2)$$

$$\lambda_i = 4 \text{sgn} \left(\tilde{F}_{X_1}(i) \times \tilde{F}_{X_2}(i) \right) \max \left(\tilde{F}_{X_1}(i)^2, \tilde{F}_{X_2}(i)^2 \right),$$

où $\tilde{F}_{X_1}(i) = F_{X_1}(i) - \frac{1}{2}$ et $\tilde{F}_{X_2}(i) = F_{X_2}(i) - \frac{1}{2}$ pour $1 \leq i \leq N$. Le graphique est présenté à la figure 3. On reconnaîtra dans l'équation (2) une sorte de corrélation des couples $(x_{1,i,j}, x_{2,i,j})$ définis

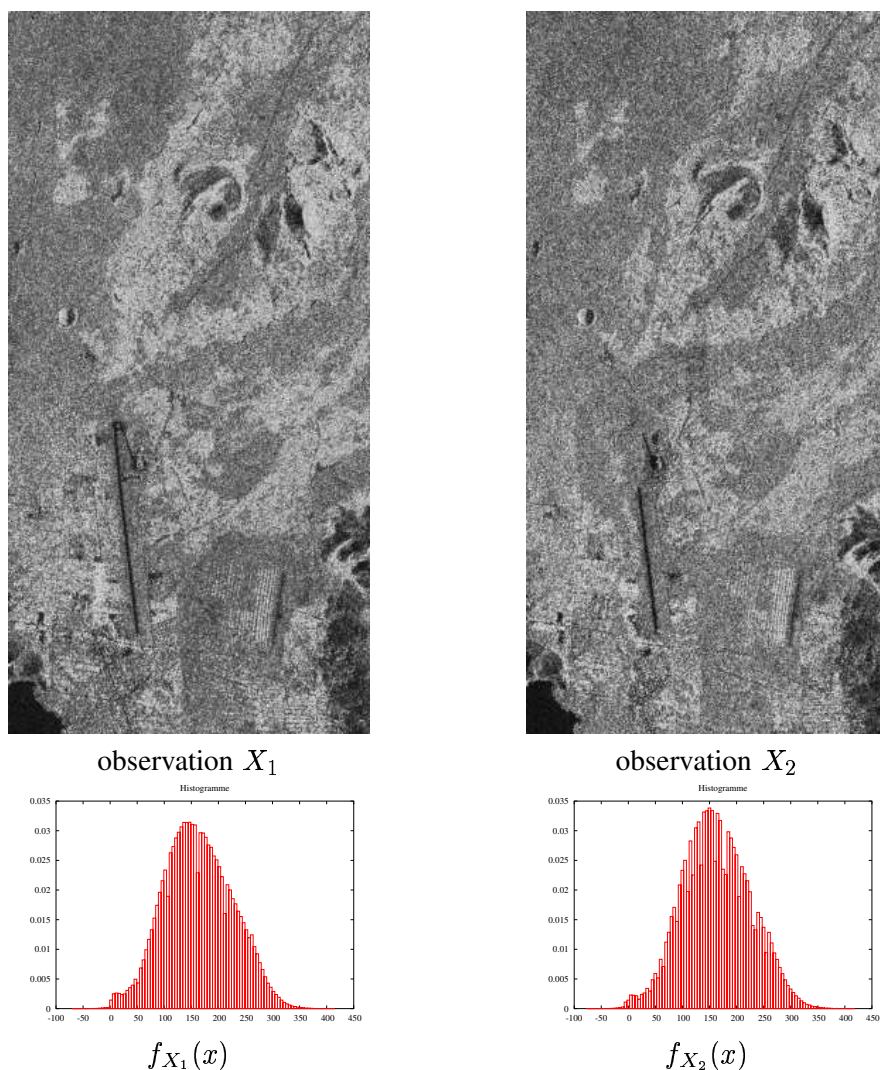


Figure 1
IMAGES RADARSAT (MODES F5 ET F2) ACQUISES AVANT ET APRÈS L'ÉRUPTION DU
NYRACONGO, R.D. CONGO, EN JANVIER 2002.

pour tout $i \neq j$ par :

$$x_{1,ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_{1,j} \leq x_{1,i}, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad x_{2,ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_{2,j} \leq x_{2,i}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Plus χ_i tend vers 0, plus les variables (X_1, X_2) tendent vers l'indépendance. Le fait que les λ_i se distribuent de façon équitable du côté positif et négatif indique que les réalisations de X_1 et X_2 ne sont pas simultanément *grandes* ou *petites*¹, ou inversement.

Lorsque les données sont gaussiennes, χ_i a la signification de la corrélation de Pearson et λ_i tend vers 0.

¹Ici, *grand* ou *petit* est à comprendre par rapport à la valeur médiane de leur distribution f_{X_1} et f_{X_2} .

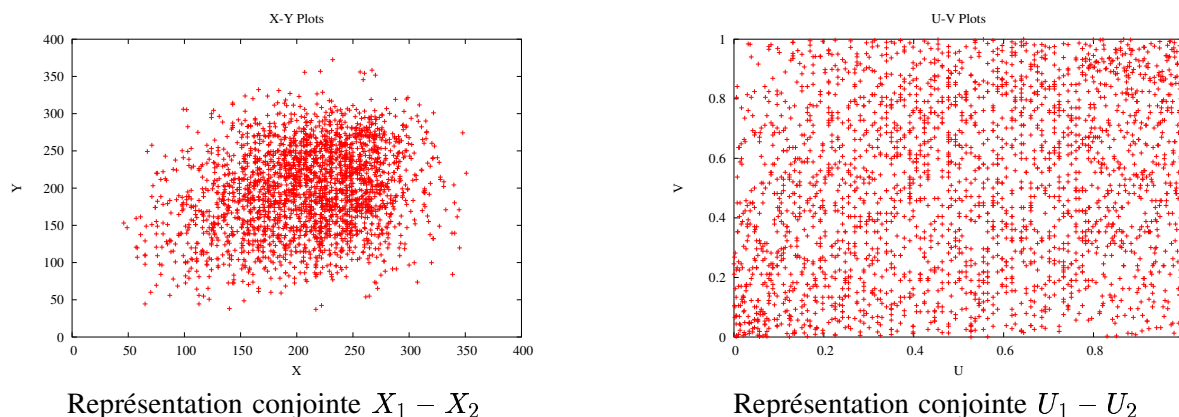


Figure 2
DEUX REPRÉSENTATIONS POSSIBLES DE X_1 ET X_2 .

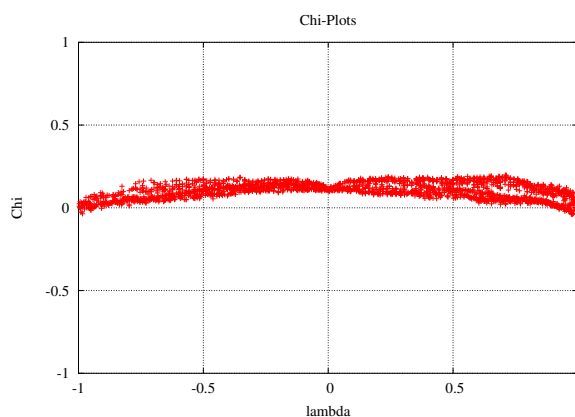


Figure 3
 χ -PLOT REPRÉSENTANT LA DÉPENDANCE DES PAIRES (X_1, X_2) .

C. Kendall Plot

Le Kendall Plot s'inspire de l'esprit du mode de représentation Q-Q Plot, qui permet de caractériser le caractère gaussien d'un ensemble de réalisations de variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n .

La représentation Q-Q Plot trace les paires $(Z_{i:N}, X_{(i)})$ où $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(N)}$ représentent les statistiques d'ordre des réalisations et $Z_{i:N} = E(Z_{(i)})$ avec $Z_{(1)} \leq Z_{(2)} \leq \dots \leq Z_{(N)}$ les statistiques d'ordre issues de variables aléatoires gaussiennes.

Pour effectuer le graphe de Kendall à partir de N réalisations de couples $(\frac{X_{1,i}}{X_{2,i}})$, il suffit de [1] :

- Estimer les H_i définis en (1),
- Ordonner les H_i pour obtenir $H_{(1)} \leq H_{(2)} \leq \dots \leq H_{(N)}$,
- Estimer les $W_{i:N}$ de façon équivalente au Q-Q plot. Les $W_{i:N}$ sont ainsi évalués comme étant l'espérance de la $i^{\text{ème}}$ variable ordonnée de H_i , en supposant que ses composantes sont indépendantes et qu'elle suit une distribution K_0 .
- Il suffit de tracer les couples $(W_{i:N}, H_{(i)})$ comme le montre la figure 4.

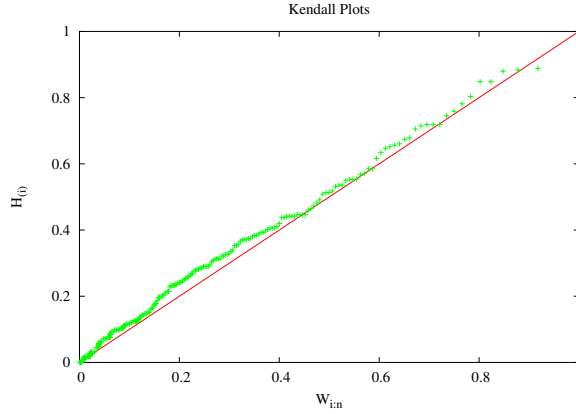


Figure 4

K-PLOT REPRÉSENTANT LA DÉPENDANCE DES PAIRES (X_1, X_2) . LA LIGNE $W_{i:N} = H_{(i)}$ REPRÉSENTE L'INDÉPENDANCE.

En reprenant la démarche précédente, il est possible de sélectionner une nouvelle zone (a priori sans changements) à la position (558, 385) pour obtenir les graphes de la figure 5. La différence est ténue mais elle montre quand même une dépendance plus importante.

L'estimation des $W_{i:N}$ mérite quelques explications : d'une façon générale, si X_1, X_2, \dots, X_N sont des variables aléatoires qui suivent une même fonction de répartition $F(\cdot)$ (densité de probabilité $f(\cdot)$), alors les variables ordonnées $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(N)}$ vont suivre une densité de probabilité suivante : $f_{Y_{(i)}}(t) = \frac{N!}{(i-1)!(N-i)!} (F(t))^{r-1} (1-F(t))^{N-i} f(t)$.

Estimer $W_{i:N}$ (espérance de la $i^{\text{ème}}$ variable ordonnée de H_i , en supposant que ses composantes sont indépendantes et qu'elle suit une distribution K_0) revient donc à calculer l'intégrale :

$$W_{i:N} = N \binom{N-1}{i-1} \int_0^1 t (K_0(t))^{r-1} (1-K_0(t))^{N-i} dK_0(t). \quad (3)$$

La détermination de $K_0(\cdot)$ peut être faite en utilisant les variables U_1 et U_2 de distribution uniforme (ici supposées indépendantes).

$$K(t) = \Pr(H(X_1, X_2) \leq t) = \Pr(U_1 U_2 \leq t) = t - t \ln(t), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (4)$$

On remarquera que l'estimation de $W_{i:N}$ passe par le calcul de $\binom{N-1}{i-1}$ qui n'est pas possible pour de grands voisinages (typiquement un voisinage maximum de 17×17 en utilisant `gsl_sf_choose` de GSL).

D. Représentations spatialisées

Nous pouvons cumuler les graphes de dépendances locales en utilisant pour chaque couple (X_1, X_2) à la position (ℓ, k) sur l'image un voisinage local de 15×15 pixels.

L'image 6 montre la superposition des courbes de Kendall. Le résultat n'est pas discriminant mais fait apparaître des couples $(X_{1,(\ell,k)}, X_{2,(\ell,k)})$ plus ou moins indépendants. Il faut donc un critère plus discriminant.

III. MESURES DE DÉPENDANCE

Des mesures de dépendance ont été proposées en étant basées sur la concordance des réalisations des variables aléatoires X_1 et X_2 . Nous abordons la corrélation de rang de Kendall et de Spearman [2].

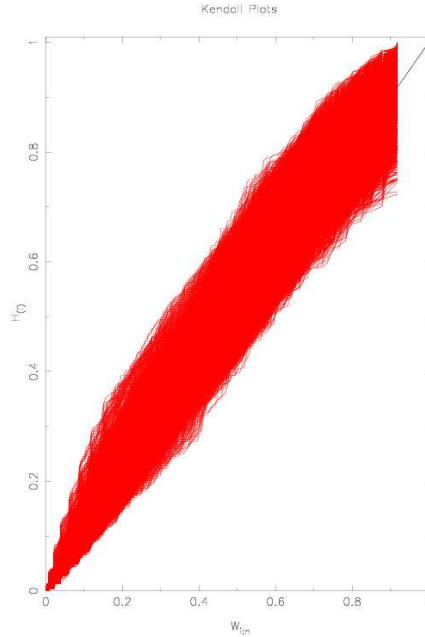


Figure 6
CUMUL DES COURBES DE KENDALL LORS D'UN PARCOURS DE L'IMAGE.

avec (X_1, X_2) , $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$, et (X'_1, X'_2) trois copies indépendantes.

L'estimateur empirique est défini par :

$$\varrho_{\text{empirique}} = 1 - 6 \sum_{i=1}^N \frac{D_i^2}{N(N^2 - 1)}, \quad (8)$$

où D_i est la différence entre le rang de $x_{1,i}$ et le rang de $x_{2,i}$.

C. Indice de Gini

La mesure de concordance de Gini est définie par :

$$\gamma = \frac{1}{[n^2/2]} \left(\sum_{i=1}^n |p_i + q_i - n - 1| - \sum_{i=1}^n |p_i - q_i| \right), \quad (9)$$

où p_i et q_i sont les rangs des n échantillons de X_1 et X_2 .

D. Corrélation médiane de Blomquist

Cette corrélation est définie de façon similaire à la concordance de Kendall mais ici à partir de la médiane de X_1 et X_2 par :

$$\beta = \Pr((X_1 - \check{x}_1)(X_2 - \check{x}_2) > 0) - \Pr((X_1 - \check{x}_1)(x_2 - \check{x}_2) < 0), \quad (10)$$

où, \check{x}_1 (resp. \check{x}_2) est la médiane de X_1 (resp. X_2).

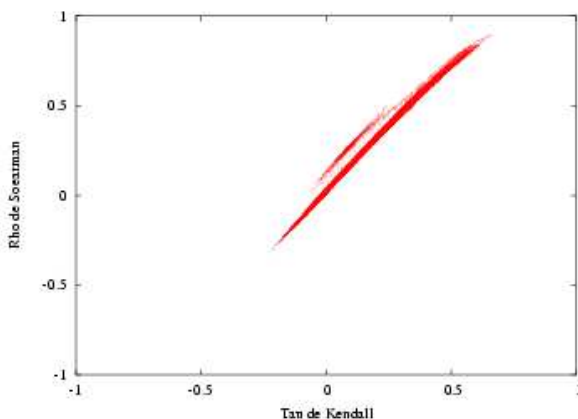


Figure 7
EVOLUTION DES COUPLES (τ, ρ) LE LONG DE L'IMAGE.

E. Graphique $\tau - \rho$

La figure 7 montre l'évolution des valeurs des couples (τ, ρ) le long du parcours de l'image entière. Là encore, le résultat n'est pas très discriminant (le petit nuage isolé correspond à la surface de l'eau du lac). Néanmoins, la relation particulière que l'on observe entre τ et ρ nous incite à regarder d'autres modélisations de couples de lois qui puissent faire apparaître ce type de relation.

Il semble que certaines copules ont cette propriété.

IV. LES COPULES

A. Introduction

Une copule (bidimensionnelle ou *2-copule*) est une fonction C qui possède les propriétés suivantes [3] :

- 1) C est définie sur $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$
- 2) $\forall u \in [0, 1], C(u, 0) = C(0, u) = 0$ et $C(u, 1) = C(1, u) = u$
- 3) C est 2-croissante : $\forall (u_1, u_2) \in [0, 1]^2$ et $(v_1, v_2) \in [0, 1]^2$, tels que $0 \leq u_1 \leq v_1 \leq 1$ et $0 \leq u_2 \leq v_2 \leq 1$

$$C(u_1, u_2) + C(v_1, v_2) \geq C(u_1, v_2) + C(v_1, u_2).$$

En fait, une copule définit une distribution avec des marges uniformes : $C(u_1, u_2) = \Pr\{U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2\}$. Cependant, les copules permettent de caractériser des distributions avec des marges données. Le Théorème de Sklar nous permet de faire le lien entre des distributions bidimensionnelles, les marges et la copule :

B. Théorème de Sklar

Soit F une distribution bidimensionnelle dont les marges sont F_1 et F_2 . Alors, F admet une représentation copule :

$$F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)).$$

Cette copule est unique si les marges sont continues. Sinon, seule la sous-copule est déterminée de façon unique sur $\text{Ran } F_1 \times \text{Ran } F_2$.

L'avantage de la copule par rapport à la distribution bidimensionnelle est qu'elle permet de caractériser le couple (u_1, u_2) en s'affranchissant des marges. Elle caractérise donc la dépendance entre deux variables aléatoires U_1, U_2 sans prendre en compte les lois marginales.

Nous pouvons interpréter la copule d'une variable aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ comme une reparamétrisation ou une normalisation de la distribution F après avoir éliminer les effets des marges F_1 et F_2 . La copule fut également appelée *fonction de dépendance* par Paul Deheuvels dans les années 70 car elle caractérise la structure de dépendance de \mathbf{X} . En outre, c'est une statistique *exhaustive* de cette dépendance [4, 5].

La représentation de la densité bidimensionnelle s'écrit alors par dérivation :

$$f(x_1, x_2) = c(F_1(x_1), F_2(x_2)) f_1(x_1) f_2(x_2)$$

$$\text{où } c(u_1, u_2) = \frac{\partial^2 C}{\partial u_1 \partial u_2}(u_1, u_2).$$

C. Quelques propriétés

En utilisant quelques propriétés des distributions appartenant à la classe de Fréchet (classe des distributions multidimensionnelles avec des marges données, marges pouvant être unidimensionnelles, multidimensionnelles et/ou conditionnelles), nous pouvons écrire dans le cas à 2 dimensions :

- $C^\perp(u_1, u_2) = u_1 u_2$ est la copule *produit* qui convient aux variables indépendantes.
- $C^+(u_1, u_2) = \min(u_1, u_2)$.
- $C^-(u_1, u_2) = \max(u_1 + u_2 - 1, 0)$.
- Nous avons toujours : $\forall (u_1, u_2) \in [0, 1]^2$,

$$C^-(u_1, u_2) \leq C(u_1, u_2) \leq C^+(u_1, u_2).$$

- L'application d'une transformation croissante à U_1 et/ou U_2 ne modifie pas la copule mais seulement les marges.
- Soit deux copules C_1 et C_2 . On dit que C_1 est *plus petite* que C_2 (noté $C_1 \prec C_2$) si et seulement si $\forall (u_1, u_2) \in [0, 1]^2$, $C_1(u_1, u_2) \leq C_2(u_1, u_2)$.
- Nous avons toujours $C^- \prec C \prec C^+$.
- Et aussi $C^- \prec C^\perp \prec C^+$.
- Deux variables aléatoires X_1 et X_2 sont dites *Positivement Quadrant Dépendantes* si

$$\Pr(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) \geq \Pr(X_1 \leq x_1)\Pr(X_2 \leq x_2).$$

C'est-à-dire

$$H(x_1, x_2) \geq F_1(x_1)F_2(x_2)$$

$$C(u_1, u_2) \geq u_1 u_2$$

$$C \succ C^\perp$$

Nous verrons, dans la présentation de quelques copules, que les copules de Frank, d'Ali-Mikhail-Haq et de Farlie-Gumbel-Morgenstern sont positivement (resp. négativement) quadrant dépendantes si leur paramètre θ est positif (resp. négatif).

D. Mesures de dépendance

Nous pouvons à présent redéfinir quelques paramètres de corrélation généralisée à travers les copules. Cependant, nous pouvons auparavant définir la *mesure d'association* :

Une mesure numérique κ d'association entre deux variables aléatoires X_1, X_2 dont la copule est C est une mesure de concordance si elle satisfait les propriétés suivantes :

- κ est définie pour toute paire (X_1, X_2) de variables aléatoires continues;
- $-1 = \kappa(X, -X) \leq \kappa(C) \leq \kappa(X, X) = 1$;

- $\kappa(X_1, X_2) = \kappa(X_2, X_1)$;
- Si X_1 et X_2 sont indépendantes, alors $\kappa(X_1, X_2) = \kappa(C^\perp) = 0$;
- $\kappa(-X_1, X_2) = \kappa(X_1, -X_2) = -\kappa(X_1, X_2)$;
- Si $C_1 \prec C_2$ alors $\kappa(C_1) \leq \kappa(C_2)$;
- Si $\{(X_{1,m}, X_{2,m})\}$ est une séquence de variables aléatoires continues dont la copule est C_m , et si $\{C_m\}$ converge vers C alors $\lim_{m \rightarrow \infty} \kappa(C_m) = \kappa(C)$.

Les mesures définies dans la section III peuvent alors se réécrire sous les formes suivantes. Le cas échéant, nous donnons l'estimateur empirique à l'aide de la copule $C_n(\cdot, \cdot)$ estimée empiriquement à partir de n réalisations du couple (X_1, X_2) .

- Tau de kendall

$$\begin{aligned} \tau &= 4 \iint_{[0,1]^2} C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) - 1 \\ &= 1 - 4 \iint_{[0,1]^2} \frac{\partial}{\partial u_1} C(u_1, u_2) \frac{\partial}{\partial u_2} C(u_1, u_2) du_1 du_2 \\ &\approx \frac{12}{n^2 - 1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(C_n \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) - \frac{i}{n} \frac{j}{n} \right). \end{aligned}$$

- Rho de Spearman

$$\begin{aligned} \rho &= 12 \iint_{[0,1]^2} u_1 u_2 dC(u_1, u_2) - 3 \\ &= 12 \iint_{[0,1]^2} C(u_1, u_2) du_1 du_2 - 3 \\ &\approx \frac{2n}{n-1} \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n \sum_{p=1}^{i-1} \sum_{q=1}^{j-1} \left(C_n \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) C_n \left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n} \right) - C_n \left(\frac{i}{n}, \frac{q}{n} \right) C_n \left(\frac{p}{n}, \frac{j}{n} \right) \right). \end{aligned}$$

- Indice de Gini

$$\begin{aligned} \gamma &= 2 \iint_{[0,1]^2} (|u_1 + u_2 - 1| - |u_1 - u_2|) dC(u_1, u_2) \\ &= 4 \int_{[0,1]} (C(u, u) + C(u, 1 - u) - u) du \\ &\approx \frac{2n}{[n^2/2]} \left(\sum_{i=1}^{n-1} C_n \left(\frac{i}{n}, 1 - \frac{i}{n} \right) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} - C_n \left(\frac{i}{n}, \frac{i}{n} \right) \right) \right). \end{aligned}$$

- Corrélation médiane de Blomquist

$$\beta = 4C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - 1$$

- Mesure de Schweizer et Wolff

$$\sigma = 12 \iint_{[0,1]^2} |C(u_1, u_2) - C^\perp(u_1, u_2)| du_1 du_2$$

- Indice de dépendance Φ^2

$$\Phi^2 = 90 \iint_{[0,1]^2} |C(u_1, u_2) - C^\perp(u_1, u_2)|^2 du_1 du_2$$

- Corrélation de rang de Gideon et Hollister

$$Rg = 2 \sup_u C(u, 1 - u) - 2 \sup_u (u - C(u, u)).$$

Pour certaines copules, nous disposons d'expressions analytiques pour τ , ρ et β que nous utiliserons pour l'estimation des paramètres de certaines copules.

E. Relation en mesures de dépendance

Théorème de Daniels (1950)

Pour des variables aléatoires continues,

$$-1 \leq 3\tau - 2\rho \leq 1.$$

Théorème de Durbin et Stuart (1951)

$$\begin{cases} \frac{1+\rho}{2} \geq \left(\frac{1+\tau}{2}\right)^2 \\ \frac{1-\rho}{2} \geq \left(\frac{1-\tau}{2}\right)^2 \end{cases}$$

et son corrolaire :

$$\begin{cases} \frac{3\tau-1}{2} \leq \rho \leq \frac{1+2\tau-\tau^2}{2} & \text{avec } \tau \geq 0 \\ \frac{\tau^2+2\tau-1}{2} \leq \rho \leq \frac{3\tau+1}{2} & \text{avec } \tau \leq 0 \end{cases}$$

Propriétés de la corrélation médiane

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{9}{8}\beta + \frac{8}{15}\beta^3 + \frac{15}{45}\beta^5 - \dots \\ \rho &= \frac{4}{3}\beta + \frac{44}{75}\beta^3 + \frac{8}{25}\beta^5 - \dots \end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(1+\beta)^2 - 1 &\leq \tau \leq 1 - \frac{1}{4}(1-\beta)^2 \\ \frac{3}{16}(1+\beta)^3 - 1 &\leq \rho \leq 1 - \frac{3}{16}(1-\beta)^3 \\ \frac{3}{8}(1+\beta)^2 - 1 &\leq \gamma \leq 1 - \frac{3}{8}(1-\beta)^2 \end{aligned}$$

F. Les copules paramétriques

Les copules archimédiennes représentent une famille de copules paramétriques qui sont définies à l'aide d'un ou plusieurs paramètres.

D'une façon générique, elle sont définies à l'aide d'une fonction *génératrice* φ et de son inverse φ^{-1} par la relation suivante :

$$C(u_1, u_2) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2)). \quad (11)$$

La fonction génératrice doit être continue, strictement décroissante de $[0, 1]$ dans $[0, \infty[$, avec $\varphi(1) = 0$. En remarquant que $\varphi(C(u_1, u_2)) = (\varphi(u_1) + \varphi(u_2))$, l'on peut dire que la fonction génératrice rends le problème séparable...

Les copules archimédiennes sont très intéressantes puisqu'on y déduit directement des propriétés intéressantes pour le calcul, notamment :

$$\tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(u)}{\varphi'(u)} du. \quad (12)$$

G. Exemples de copules

- Copule Normale

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2, \rho) &= \Phi_\rho(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2)) \\ &= \int_0^{u_1} \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(u_2) - \rho\Phi^{-1}(u)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) du. \end{aligned}$$

Φ_ρ est la distribution normale multivariée de corrélation ρ .

Il apparaît qu'avec cette copule, les relations entre U_1 et U_2 peuvent être bâties à travers la régression quantile. Cette régression de U_2 sur U_1 s'exprime par :

$$u_2 = \Phi \left(\rho \Phi^{-1}(u_1) + \sqrt{1 - \rho^2} \Phi^{-1}(\alpha) \right),$$

avec $\alpha = \Pr(U_2 \leq u_2 | U_1 = u_1)$. C'est donc une relation linéaire qui ne convient pas a priori à notre problème.

De même, l'on peut montrer que la copule normale permet de corrélérer les valeurs extrêmes...

- Copule t de Student

Cette copule est la fonction de dépendance associée à la distribution t multivariée.

La distribution t_ν est définie en 1D par : $f(u) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\pi\nu}\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{u^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$.

Dans le cas bivarié :

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2, \rho, \nu) &= \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left(1 + \frac{x_1^2 + x_2^2 - 2\rho x_1 x_2}{\nu(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} dx_1 dx_2 \\ &= \int_0^{u_1} t_{\nu+1} \left(\sqrt{\frac{\nu+1}{\nu + [t_\nu^{-1}(u_1)]^2}} \frac{t_\nu^{-1}(u_2) - \rho t_\nu^{-1}(u)}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) du. \end{aligned}$$

La régression quantile donne ici :

$$u_2 = t_\nu \left(\rho t_\nu^{-1}(u_1) + \sqrt{\frac{(1-\rho^2)(\nu + [t_\nu^{-1}(u_1)]^2)}{\nu+1}} t_{\nu+1}^{-1}(\alpha) \right),$$

avec $\alpha = \Pr(U_2 \leq u_2 | U_1 = u_1)$.

La copule de Student est un cas particulier de la copule normale lorsque $\nu \rightarrow 1$. Mais attention, pour $\rho = 0$, il y a indépendance pour la copule normale, mais pas pour la copule de Student.

- Copule de Gumbel-Hougaard, parfois notée Gumbel

C'est une copule archimédienne avec $\varphi_\theta(t) = (-\ln t)^\theta$.

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2) &= \exp \left(- \left((-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta \right)^{-1/\theta} \right) \quad \theta \geq 1, \\ c(u_1, u_2) &= \left(\frac{1}{u_1} (-\ln u_1)^{\theta-1} \right) \left(\frac{1}{u_2} (-\ln u_2)^{\theta-1} \right) \\ &\quad \left[\left((-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta \right)^{-\frac{1}{\theta}} - (1 + \theta) \right] \\ &\quad \left((-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta \right)^{-\frac{1}{\theta}-2} \\ &= C(u_1, u_2). \end{aligned}$$

Le paramètre θ peut-être estimé à l'aide du ρ de Spearman par :

$$\rho_\theta = \frac{\theta - 1}{\theta}.$$

- Copule de Frank

C'est une copule archimédienne avec $\varphi_\theta(t) = -\ln \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}$.

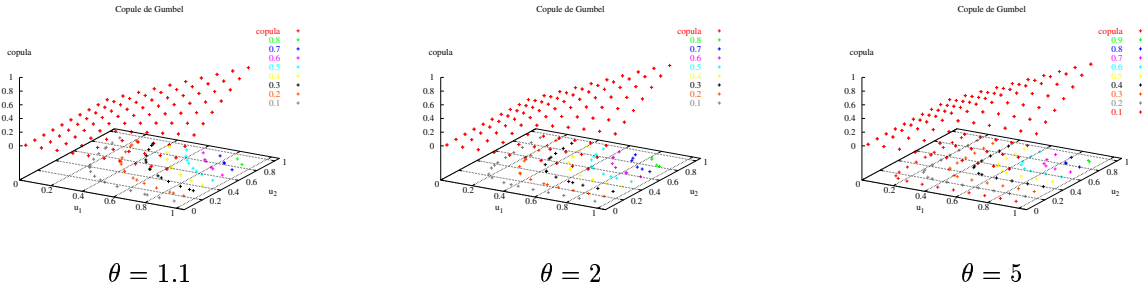


Figure 8
COPULE DE GUMBEL.

$$C(u_1, u_2) = -\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right) \quad \theta \in \mathbb{R}^*,$$

$$c(u_1, u_2) = \frac{\theta e^{-\theta u_1} e^{-\theta u_2} (e^{-\theta} - 1)}{[(e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1) + (e^{-\theta} - 1)]^2}$$

L'estimation de θ à l'aide de τ et de ϱ est assez délicate puisqu'elle s'écrit avec des fonctions de Debye comme suit :

$$\tau_\theta = 1 - \frac{4}{\theta} (1 - D_1(\theta))$$

$$\varrho_\theta = 1 - \frac{12}{\theta} (D_1(\theta) - D_2(\theta))$$

avec la fonction de Debye définie de façon générique par

$$D_k(x) = \frac{k}{x^k} \int_0^x \frac{t^k}{e^t - 1} dt \quad k \in \mathbb{N}.$$

En fait, l'estimation devient plus confortable à l'aide de la corrélation médiane β puisque :

$$\beta_\theta = \frac{4}{\theta} \ln \cosh \frac{\theta}{4},$$

ce qui nous permet de déterminer les relations approchées suivantes :

$$\begin{cases} \tau_\theta & \approx \frac{1}{6}\theta - \frac{1}{450}\theta^3 + \frac{1}{23520}\theta^5 - \dots \\ \varrho_\theta & \approx \frac{1}{9}\theta - \frac{1}{900}\theta^3 + \frac{1}{52920}\theta^5 - \dots \\ \beta_\theta & \approx \frac{1}{8}\theta - \frac{1}{768}\theta^3 + \frac{1}{46080}\theta^5 - \dots \end{cases}$$

- Copule de Clayton

C'est une copule archimédienne avec $\varphi_\theta(t) = \frac{1}{\theta} (t^{-\theta} - 1)$.

$$C(u_1, u_2) = \max \left(0, \left(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1 \right)^{-1/\theta} \right) \quad \theta \in [-1, \infty[\setminus \{0\}$$

$$c(u_1, u_2) = (1 + \theta) u_1^{-\theta-1} u_2^{-\theta-1} \left(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1 \right)^{-\frac{1}{\theta}-2} \quad \text{si } u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1 > 0.$$

Avec cette copule l'on trouve la relation sympatique : $\tau_\theta = \frac{\theta}{\theta+2}$.

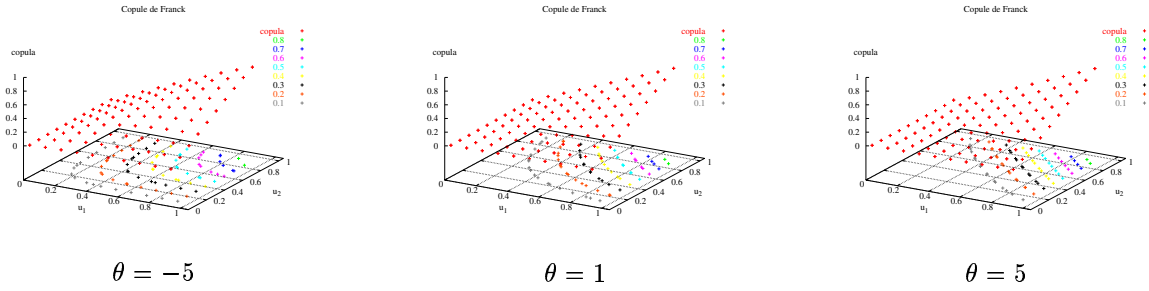


Figure 9
COPULE DE FRANK.

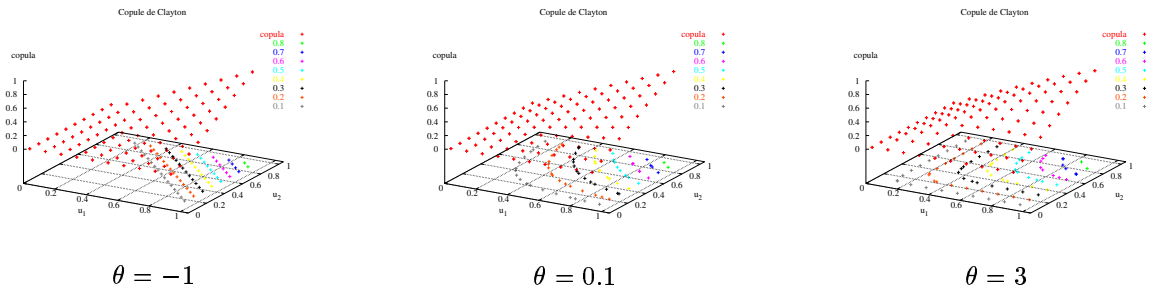


Figure 10
COPULE DE CLAYTON.

- Copule de Plackett

$$C(u_1, u_2) = \frac{[1 + (\theta - 1)(u_1 + u_2)] - \sqrt{[1 + (\theta - 1)(u_1 + u_2)]^2 - 4u_1u_2\theta(\theta - 1)}}{2(\theta - 1)}$$

$$c(u_1, u_2) = \theta \frac{1 + (\theta - 1)(u_1 + u_2) + 2u_1u_2(2\theta^2 - 5\theta + 1)}{[(1 + (\theta - 1)(u_1 + u_2))^2 - 4u_1u_2\theta(\theta - 1)]^{\frac{3}{2}}}$$

avec $\theta > 0, \theta \neq 1$.

Là encore la corrélation médiane permet d'estimer assez facilement θ :

$$\varrho_\theta = \frac{\theta + 1}{\theta - 1} - \frac{2\theta}{(\theta - 1)^2} \ln \theta$$

$$\beta_\theta = \frac{\sqrt{\theta} - 1}{\sqrt{\theta} + 1}.$$

- Copule de Ali-Mikhail-Haq

Il s'agit également d'une copule archimédienne avec $\varphi_\theta(t) = \ln \frac{1-\theta(1-t)}{t}$ avec $-1 \leq \theta \leq 1$

$$C(u, v) = \frac{uv}{1 - \theta(1-u)(1-v)}$$

$$c(u, v) = \frac{(1-\theta)^2 + u_1\theta(\theta-1) + u_2\theta(\theta-1) + u_1u_2\theta(\theta+1)}{[1 - \theta(1-u_1)(1-u_2)]^3}$$

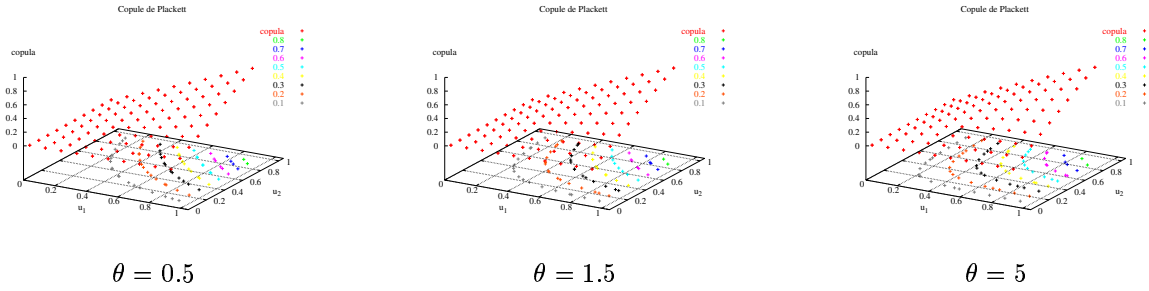


Figure 11
COPULE DE PLACKETT.

L'estimation est là encore plus facile avec la corrélation médiane :

$$\tau_{\theta} = \frac{3\theta - 2}{3\theta} - \frac{2(1 - \theta)^2}{3\theta^2} \ln(1 - \theta)$$

$$\varrho_{\theta} = \frac{12(1 + \theta)}{\theta^2} \operatorname{dilog}(1 - \theta) - \frac{12(1 - \theta)}{\theta^2} \ln(1 - \theta)$$

avec : $\operatorname{dilog}(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1-t} dt$

$$\beta_{\theta} = \frac{\theta}{4 - \theta}$$

On peut également déduire les relations suivantes :

$$\begin{cases} \tau \approx \frac{8}{9}\beta + \frac{8}{15}\beta^3 + \frac{16}{45}\beta^5 + \dots \\ \varrho \approx \frac{4}{3}\beta + \frac{44}{75}\beta^3 + \frac{8}{25}\beta^5 + \dots \end{cases}$$

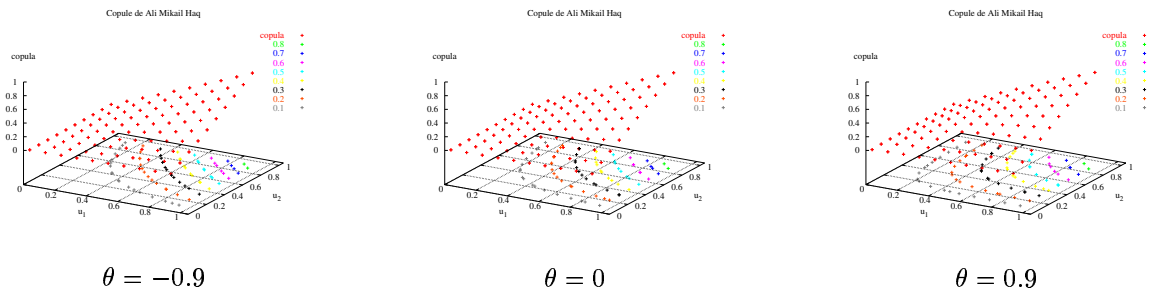


Figure 12
COPULE DE ALI-MICKHAÏL-HAQ.

- Copule de Raftery

Cette copule est assez particulière puisqu'elle est issue d'une combinaison de trois variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle (Z_1 , Z_2 et Z_3) et d'une variable de Bernoulli (J) :

$$\begin{cases} X_1 = (1 - \theta)Z_1 + JZ_3 \\ X_2 = (1 - \theta)Z_2 + JZ_3 \end{cases} \quad \text{avec } \theta \in [0, 1].$$

La copule elle-même est définie par :

$$C(u_1, u_2) = \min(u_1, u_2) + \frac{1 - \theta}{1 + \theta} (u_1 u_2)^{\frac{1}{1-\theta}} \left\{ 1 - \max(u_1, u_2)^{-\frac{1+\theta}{1-\theta}} \right\}$$

Le paramètre θ s'estime avec :

$$\tau_\theta = \frac{2\theta}{3 - \theta}$$

$$\varrho_\theta = \frac{\theta(4 - 3\theta)}{(2 - \theta)^2}$$

ce qui donne la relation :

$$\varrho = \frac{3\tau(8 - 5\tau)}{(4 - \tau)^2}, \quad \tau, \varrho \in [0, 1].$$

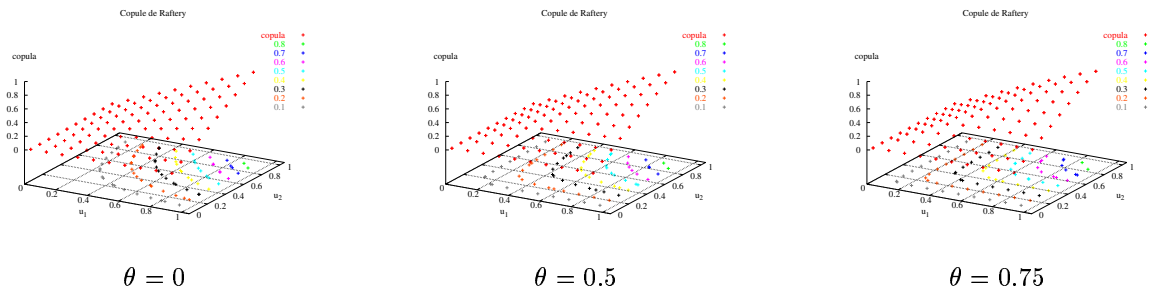


Figure 13
COPULE DE RAFTERY.

- Copule à section cubique

C'est en fait une copule multivariée (voir section suivante) définie par :

$$C(u_1, u_2) = u_1 u_2 + u_1 u_2 (1 - u_1)(1 - u_2) [a_1 u_2 (1 - u_1) + a_2 (1 - u_2)(1 - u_1) + b_1 u_1 u_2 + b_2 u_1 (1 - u_2)].$$

Avec

$$\tau_{a_1, a_2, b_1, b_2} = \frac{a_1 + a_2 + b_1 + b_2}{18} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{450}$$

$$\varrho_{a_1, a_2, b_1, b_2} = \frac{a_1 + a_2 + b_1 + b_2}{12}$$

En fait, on se limitera ici au cas où $a_1 = b_2 = 4\theta$ et $a_2 = b_1 = 2\theta$, ce qui donne :

$$C(u_1, u_2) = u_1 u_2 + 2\theta u_1 u_2 (1 - u_1)(1 - u_2)(1 + u_1 + u_2 - 2u_1 u_2)$$

$$c(u_1, u_2) = 1 + 2\theta [1 + 3(-u_1^2 - u_2^2 + 2u_1 u_2(5 - 3(1 - u_1)(1 - u_2)))]$$

avec estimation donnée par :

$$\tau_\theta = \frac{2}{3}\theta - \frac{6}{225}\theta^2$$

$$\varrho_\theta = \theta \quad \theta \in [0, \frac{1}{4}]$$

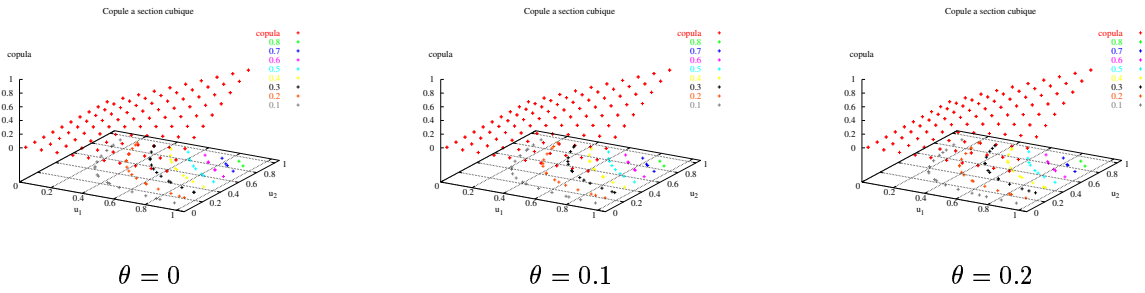


Figure 14
COPULE À SECTION CUBIQUE.

- Copule de Farlie-Gumbel-Morgenstern

$$C(u_1, u_2) = u_1 u_2 + \theta u_1 u_2 (1 - u_1)(1 - u_2) \quad \text{avec } \theta \in [-1, 1],$$

$$c(u_1, u_2) = 1 + \theta(1 - 2u_1)(1 - 2u_2)$$

Les paramètres s'estiment par :

$$\tau_\theta = \frac{2\theta}{9} \quad \tau_\theta \in \left[-\frac{2}{9}, \frac{2}{9}\right]$$

$$\varrho_\theta = \frac{\theta}{3} \quad \varrho_\theta \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$$

avec la relation $3\tau_\theta = 2\varrho_\theta$.

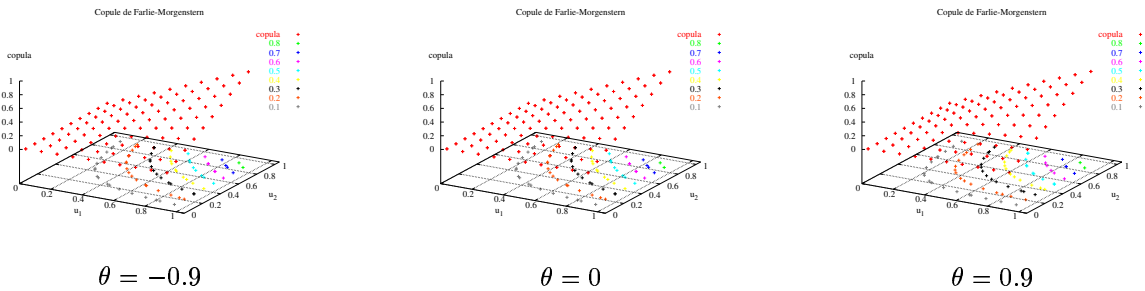


Figure 15
COPULE DE FARLIE-GUMBEL-MORGENSTERN.

H. Copules multivariées

Des copules plus complexes peuvent être construites avec plusieurs paramètres de façon à exprimer des dépendances plus raffinées.

- Les copules archimédiennes peuvent être exprimées avec une fonction génératrice φ multivariée :
 $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2$.
- Des copules peuvent être définies à partir d'une première copule et d'une bijection γ de $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

$$C_\gamma(u_1, u_2) = \gamma^{-1}(C(\gamma(u_1), \gamma(u_2))).$$

Par exemple, à partir de la copule de Frank, dont l'expression est donnée plus haut, et avec la fonction $\gamma(x) = x^{1/\theta_2}$, nous obtenons $C_\gamma(u_1, u_2)$ qui est une copule pour $\theta_2 \geq 1$:

$$C_\gamma(u_1, u_2) = \left(-\frac{1}{\theta_1} \ln \left(1 - \frac{(1 - e^{-\theta_1 u_1^{1/\theta_2}})(1 - e^{-\theta_1 u_2^{1/\theta_2}})}{1 - e^{-\theta_1}} \right) \right)^{\theta_2}.$$

D'autres fonctions $\gamma(\cdot)$ peuvent être définies [6], telles : $\gamma(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x)$ ou $\gamma(x) = \frac{4}{\pi} \arctan(x)$...

- La copule de Fréchet est définie par :

$$C(u_1, u_2) = \alpha C^+ + (1 - \alpha - \theta) C^\perp + \theta C^-$$

avec pour estimation de paramètres les relations :

$$\tau_{\alpha, \theta} = \frac{(\alpha - \theta)(\alpha + \theta + 2)}{3}$$

$$\varrho_{\alpha, \theta} = \alpha - \theta$$

- La copule de Marshall-Olkin est définie par :

$$C(u_1, u_2) = \min(u_1^{1-\alpha} u_2, u_1 u_2^{1-\theta})$$

qui est dérivable partout sauf en $u_1^\alpha = u_2^\theta$. L'estimation de paramètres s'effectue avec :

$$\tau_{\alpha, \theta} = \frac{\alpha\theta}{\alpha - \alpha\theta + \theta}$$

$$\varrho_{\alpha, \theta} = \frac{3\alpha\theta}{2\alpha - \alpha\theta + 2\theta}$$

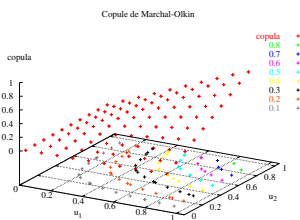
ce qui donne la relation : $\varrho = \frac{3\tau}{2+\tau}$ avec $\alpha, \theta \in [0, 1]$.

Dans le cas où $\alpha = \theta$,

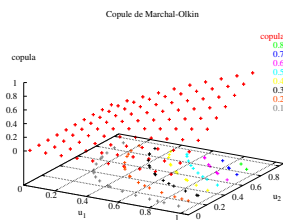
$$\alpha = 2 \frac{\tau}{1 + \tau} = \frac{4\varrho}{3 + \varrho}$$

On peut aussi écrire sa densité sous la forme :

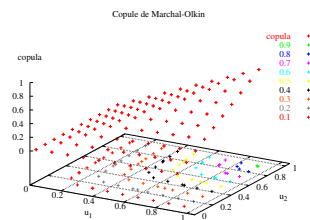
$$c(u_1, u_2) = \begin{cases} (1 - \theta) \frac{1}{u_1^\theta} & \text{si } u_2 < u_1, \\ (1 - \theta) \frac{1}{u_2^\theta} & \text{si } u_1 < u_2, \\ \text{non définie} & \text{si } u_1 = u_2. \end{cases}$$



$$\alpha = 0.3 \quad \theta = 0.5$$



$$\alpha = 0.1 \quad \theta = 0.9$$



$$\alpha = 0.8 \quad \theta = 0.8$$

Figure 16
COPULE DE MARSHAL-OLKIN.

V. ESTIMATION DES DÉPENDANCES

Comme les mesures de corrélation généralisée ne sont pas suffisantes pour caractériser la dépendance entre les marginales, nous entendons par dépendance, les fonctions de dépendance et donc les copules.

Nous allons estimer de façon empirique les dépendances entre les N réalisations de $u_{1,i} = F_{X_1}(x_{1,i})$ et de $u_{2,i} = F_{X_2}(x_{2,i})$ pour $i \in \{1, 2, \dots, N\}$.

La copule empirique peut être obtenue en inversant le résultat de Sklar :

$$\widehat{C}(u_1, u_2) = F(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2)). \quad (13)$$

De même, l'estimation de la densité de la copule peut être intéressante pour bien faire la différence avec la copule indépendante C^\perp :

$$\widehat{c}(u_1, u_2) = \frac{f(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2))}{f_1(F_1^{-1}(u_1)) f_2(F_2^{-1}(u_2))} \quad (14)$$

La figure 17 montre l'allure de la copule empirique et de sa densité. Cette copule $C_{\text{emp}}(u_1, u_2)$ peut-être solution de l'équation

$$(1 - u_1) \frac{1}{C_{\text{emp}}(u_1, u_2)^\theta} + (1 - u_2) \frac{1}{C_{\text{emp}}(u_1, u_2)^\theta} = (1 - C_{\text{emp}}(u_1, u_2)) \frac{1}{C_{\text{emp}}(u_1, u_2)^\theta},$$

avec θ proche de 1.

Cependant, les copules de Frank, de Clayton, de Plackett, d'Ali-Mikhail-Haq, de Raftery ou de Marchal-Olkin pourraient correspondre...

VI. APPLICATION

Nous allons appliquer simplement une estimation de loi conjointe à partir des données SAR et les resituer dans le contexte de la détection de changements. La procédure peut donc se résumer ainsi :

- 1) On considère les deux images de la figure 1 et avons donc deux variables aléatoires X_1 et X_2 . Nous posons a priori une loi paramétrique pour X_1 (resp. X_2), dont la densité est notée $f_{X_1}(\cdot)$ (resp. $f_{X_2}(\cdot)$), et une copule $C(\cdot, \cdot)$.
- 2) Nous utilisons une fenêtre glissante de taille $\omega \times \omega$.

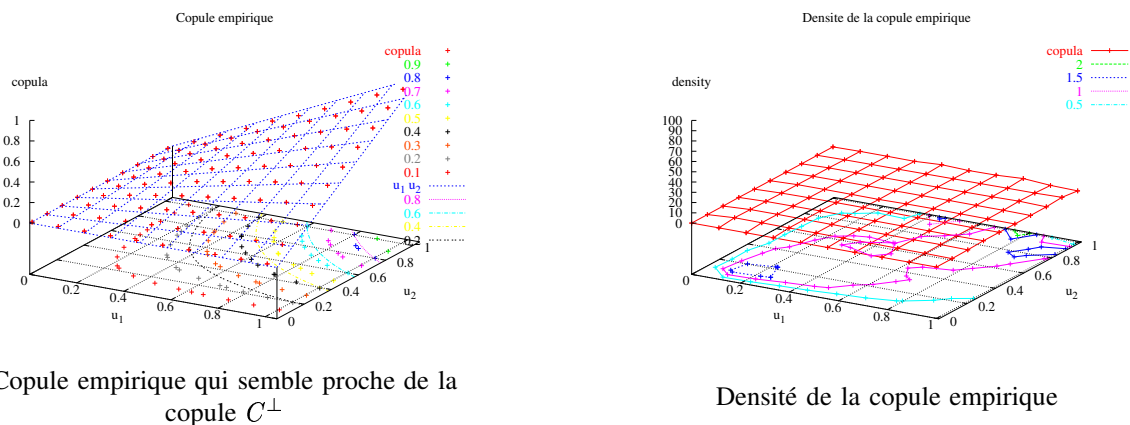


Figure 17

COPULE EMPIRIQUE REPRÉSENTANT LA DÉPENDANCE GÉNÉRALISÉE ENTRE LES IMAGES X_1 ET X_2 DE NOTRE ÉTUDE.

3) Au point courant, nous estimons les paramètres des lois marginales et de la copule.

Grâce aux paramètres locaux de la loi du couple, nous pouvons sortir certaines informations comme le taux de Kendall local... Nous pouvons également évaluer la distance de la distribution jointe par rapport à la distribution indépendante. Nous pouvons donc évaluer les paramètres de type σ de Schweizer et Wolff ou l'indice de dépendance Φ^2 . Nous pouvons également utiliser les f -divergences pour évaluer la distance entre les distributions.

A. Distance de Bhattacharyya

Le cas de la distance de Bhattacharyya \mathcal{B} entre la loi conjointe et les marginales est exemplaire :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(F_{X_1, X_2}, F_{X_1} F_{X_2}) &= \iint_{-\infty}^{\infty} \sqrt{f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)} dx_1 dx_2 \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} \sqrt{[c(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)) f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)] f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)} dx_1 dx_2 \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} \sqrt{c(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)) f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)} dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

ce qui donne par changement de variable :

$$= \iint_0^1 \sqrt{c(u_1, u_2)} du_1 du_2 \quad (15)$$

Ainsi, la mesure d'indépendance n'est-elle plus liée aux marginales ! Elle peut également être évaluée analytiquement selon l'expression de certaines copules (et de leur densité).

Dans ce cas, la copule de Marchal-Olkin semble être le meilleur compromis. Sa densité est définie pour $\theta \in [0, 1]$ par :

$$c(u_1, u_2) = \begin{cases} (1 - \theta) \frac{1}{u_1^\theta} & \text{si } u_2 < u_1, \\ (1 - \theta) \frac{1}{u_2^\theta} & \text{si } u_1 < u_2, \\ \text{non définie} & \text{si } u_1 = u_2. \end{cases}$$

La distance de Bhattacharyya s'écrit donc analytiquement :

$$\mathcal{B}(F_{X_1, X_2}, F_{X_1} F_{X_2}) = \sqrt{1 - \theta} \left(\frac{1}{1 - \frac{\theta}{2}} + \frac{1}{2 - \frac{\theta}{2}} - \frac{1}{(1 - \frac{\theta}{2})(2 - \frac{\theta}{2})} \right).$$

De même pour la distance de Bhattacharyya entre deux distributions conjointes (en utilisant des marginales indentiques) :

$$\mathcal{B}(F_{X_1, X_2}, G_{X_1, X_2}) = \iint_0^1 \sqrt{c_F(u_1, u_2) c_G(u_1, u_2)} du_1 du_2.$$

En utilisant la copule de Marchal-Olkin, nous obtenons :

$$\mathcal{B}(F_{X_1, X_2}, G_{X_1, X_2}) = \sqrt{(1 - \theta_F)(1 - \theta_G)} \left(\frac{1}{1 - \Theta} + \frac{1}{2 - \Theta} - \frac{1}{(1 - \Theta)(2 - \Theta)} \right), \quad (16)$$

avec $\Theta = \frac{1}{2}(\theta_F + \theta_G)$.



Distance de Bhattacharyya estimée à travers l'éq. (15), en utilisant la copule de Marchal-Olkin.



Distance de Bhattacharyya estimée à travers l'éq. (16).

Figure 18

DISTANCE ENTRE DISTRIBUTION ESTIMÉE EN DIRECT OU À TRAVERS UN PARAMÈTRE CARACTÉRISTIQUE D'UNE COPULE. LA DIFFÉRENCE ENTRE LES TEMPS D'EXÉCUTION EST DE 7.

B. Entropie relative

En reprenant l'expression de la densité bidimensionnelle d'une copule :

$$f(x_1, x_2) = c(F_1(x_1), F_2(x_2))f_1(x_1)f_2(x_2),$$

que l'on peut aussi ré-écrire avec $u_i = F_i(x_i)$:

$$f(x_1, x_2) = c(u_1, u_2)f_1(x_1)f_2(x_2),$$

il est possible de montrer que toute f -divergence entre la densité conjointe $p(x_1, x_2)$ et le produit des densités marginales $p_1(x_1)p_2(x_2)$ ne dépend que de la copule. En effet :

$$\mathcal{D}(p(x_1, x_2), p_1(x_1)p_2(x_2)) = g \left(\iint f \left(\frac{p(x_1, x_2)}{p_1(x_1)p_2(x_2)} \right) p_1(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right) \quad (17)$$

$$= g \left(\iint f(c(P_1(x_1), P_2(x_2))) c(P_1(x_1), P_2(x_2)) p_1(x_1)p_2(x_2) dx_1 dx_2 \right) \quad (18)$$

et par changement de variable,

$$= g \left(\iint_{[0,1]^2} f(c(u_1, u_2)) c(u_1, u_2) du_1 du_2 \right) \quad (19)$$

$$= \mathcal{D}(c(u_1, u_2), \mathbb{1}_{[0,1]^2}). \quad (20)$$

en se souvenant que $C^\perp(u_1, u_2) = u_1 u_2$ est la copule qui exprime l'indépendance,

$$= \mathcal{D} \left(c(u_1, u_2), c^\perp(u_1, u_2) \right). \quad (21)$$

Résultat particulièrement intéressant pour obtenir une expression analytique de la divergence de Kullback-Leibler $\mathcal{I}(X_1|X_2)$. Reprenons plutôt la copule de Marchal-Olkin, l'information mutuelle devient alors :

$$\mathcal{D}_{g=-\text{Id}, f=\log}(P_{X_1, X_2}, P_{X_1} P_{X_2}) = -2 \frac{1-\theta}{2-\theta} \log \frac{1}{1-\theta} - \frac{\theta}{2-\theta} + \frac{\theta^2}{(2-\theta)^2}. \quad (22)$$



Information mutuelle estimée à travers l'éq. (17), en utilisant la copule de Marchal-Olkin.



Distance de information mutuelle estimée à travers l'éq. (22).

Figure 19

INFORMATION MUTUELLE ESTIMÉE EN DIRECT OU À TRAVERS UN PARAMÈTRE CARACTÉRISTIQUE D'UNE COPULE. LA DIFFÉRENCE ENTRE LES TEMPS D'EXÉCUTION EST DE 8.

REFERENCES

- [1] C. Genest and J.-C. Boies, "Detecting dependence with Kendall plots," *The American Statistician*, vol. 57, no. 4, Nov. 2003.
- [2] M. Vrac, "Analyse et modélisation des données probabilistes par décomposition de mélange de copules et application à une base de données climatologiques," Thèse de doctorat, Université de Paris IX — Dauphine, Dec. 6, 2002.
- [3] T. Roncalli, "Gestion des risques multiples ou copules et aspects multidimensionnels du risque," cours ENSAI de 3^e année, Groupe de recherche opérationnelle — Crédit Lyonnais, Feb. 2002.
- [4] R. B. Nelsen, *An Introduction to Copulas*, ser. Lectures Notes in Statistics. New York: Springer Verlag, 1999, vol. 139.
- [5] H. Joe, *Multivariate models and Dependence concepts*, ser. Monographs on Statistics and Applied Probability. Chapman & Hall / CRC, 2001, vol. 73.
- [6] V. Durrleman, A. Nikeghbali, and T. Roncalli, "A simple transformation of copulas," Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, Tech. Rep., 2000. [Online]. Available: <http://gro.creditlyonnais.fr/content/rd/home/protect\TI\textunderscorecopulas.htm>